УДК 338.24.01

А. Ю. ОБЫДЕНОВ
Кандидат физ.-мат. наук, доцент Департамента менеджмента ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве РФ». Область научных интересов: стратегическое управление, новая институциональная экономическая теория, системный подход к управлению, теория сложности в стратегическом управлении.

Email:
alexander.obydenov@gmail.com

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМАЛИЗАЦИЯ ИНСТИТУТОВ

АННОТАЦИЯ

Предложен способ математической формализации институтов в рамках теоретико-игрового подхода. Правила представляются перестановками выигрышей в платежной матрице. Такие перестановки ведут к изменению структуры равновесий в игре. Этот подход позволяет разделить координационные и распределительные аспекты институтов, разбить институты на классы и выделить совокупность институтов, производящих тождественное преобразование. Средствами эволюционной теории игр такое параметрическое управление отображается в изменении структуры устойчивых состояний, что позволяет исследовать влияние институтов на самоорганизацию, в частности через изменение топологии фазового портрета системы. В связи с тем что динамика со множественными стационарными точками типична для общей проблемы координации, предложенный способ формализации правил может иметь достаточно широкое применение.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА ИНСТИТУТЫ, ПРАВИЛА, ТЕОРИЯ ИГР, ПЕРЕСТАНОВКИ ВЫИГРЫШЕЙ, МАТРИЦА, ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ.

ВВЕДЕНИЕ

В предыдущих исследованиях мы предложили подход к стратегическому управлению, основанный на параметрическом управлении, где устремление к достижению целевых устойчивых состояний и режимов функционирования обеспечивается с помощью формальных институтов [Обыденов А.Ю., 2016; 2017].

Подход, рассматривающий институты как инструмент параметрического управления, ставит задачу найти соответствующие способы математической формализации[1] институтов через их математическое представление. Возникает задача формального отображения множества институтов на множество их представлений. Предлагаемый нами способ математического отображения институтов может содействовать математической формализации институтов для целей параметрического стратегического управления.

Все способы описания институтов делятся на явные и неявные. В первом случае описываются формальные компоненты институтов, во втором – количественные и качественные экономические последствия применения институтов. Первые примеры явного описания институтов содержатся еще в трактатах Геродота (см., например: [Геродот, 1972]). Одна из современных попыток явной алгебраической формализации института предпринята В. Тамбовцевым (2004).

Неявная форма описания института характерна для микроэкономического анализа. Пример такого описания разобран, например, в исследовании Д. Бромли [Bromley D.W., 1989, р. 111–115]. Аналитический микроэкономический подход мы использовали для определения последствий института саморегулирования [Крючкова П.В., Обыденов А.Ю., 2003]. Возможен и теоретико-игровой способ описания институтов: институты приняты как фиксированные правила [Shubik M., 1982], представлены устойчивыми стратегиями в повторяющихся играх [Schotter A., 1981]. Однако подобные подходы не позволяют рассматривать институты в качестве параметров, управляющих состоянием объекта (соотношением выигрышей в платежной матрице). Предлагаемый способ как явного, так и неявного алгебраического представления институтов актуален в силу того, что отвечает требованиям параметрического подхода [Обыденов А.Ю., 2016; 2017].

[1] Математическая формализация институтов понимается как использование формальных методов описания институтов.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ФОРМАЛИЗАЦИЯ ИНСТИТУТОВ. ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ

Начнем с неявного подхода, он предполагает представление правил через последствия их применения в рамках матричных игр. Рассмотрим случай симметричной игры 2x2:

x_1, x_1	x_3, x_2
x_2, x_3	x_4, x_4

Будем считать, что применение правила приводит к изменениям в распределении выигрышей в платежной матрице. Можно представить x_i, $i=\overline{1,4}$ независимыми координатами алгебраического вектора в фазовом пространстве:

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

X будет определять состояние системы, а действие правила – возможный переход системы из одного состояния в другое. Представим правило в виде оператора $\hat{R}$, действующего на X ($\hat{R}: X \to X$), и тем самым перейдем к явному описанию правил.

Предположим, что в ряде случаев в рамках динамической задачи, в частности для анализа точек равновесий в чистых стратегиях, значение имеет соотношение элементов X. Поэтому достаточно представить $\hat{R}$ как перестановку компонентов алгебраического вектора X.

При $x_1 > x_2 > x_4 > x_3$ получаем чистую координационную игру с двумя равновесиями по Нэшу (проблема координации[2]) ($X_1 = X$ при $x_1 > x_2 > x_4 > x_3$).

При $x_2 > x_1 > x_4 > x_3$ возникает «дилемма заключенного» с одним равновесием по Нэшу, являющимся неоптимальным по Парето (проблема кооперации) ($X_2 = X$ при $x_2 > x_1 > x_4 > x_3$).

При $x_1 > x_2 > x_3 > x_4$ имеем дело с игрой, где равновесие по Нэшу совпадает с равновесием по Парето (равновесие по Нэшу оптимально по Парето) ($X_2 = X$ при $x_1 > x_2 > x_3 > x_4$).

Формально действие правила можно представить в виде:

$$\hat{R}X = X', \qquad (2)$$

где $\hat{R}$ – оператор перестановки.

Введем обозначение: $\hat{R}_{13} \equiv \hat{R}: X_1 \longmapsto X_3$, тогда для рассмотренных выше случаев имеем:

$$\hat{R}_{13}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Матрица правила равна:

$$[\hat{R}_{13}]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

Перестановки могут быть представлены в виде непересекающихся циклов (в данном случае в виде элементарной транспозиции), отсюда: $\hat{R}_{13}=(3,4)$.

Итак, правило $\hat{R}_{13}$ переводит параметрически управляемую систему из состояния X_1 в состояние X_3. Представлением правила является оператор перестановки, можно воспользоваться известными свойствами перестановок, которые автоматически распространяются на правила.

Матрицы перестановок ортогональны, образуют группу, обратная матрица равна транспонированной. Таким образом, правила образуют группу преобразований. Отсюда, в частности, вытекает обратное правило, отменяющее данное. Матрица представления обратного правила транспонирована по отношению к исходной. Правило, примененное такое количество раз, которое равно порядку группы, возвращает систему в начальное состояние.

Следует заметить, что выбранная нами форма алгебраического представления правила не позволяет установить взаимно-однозначного соответствия между правилом и его представлением. Вообще говоря, каждое представление является вырожденным: ему соответствует множество (класс) правил.

Рассмотрим перестановку, которая характеризуется единичным оператором $\hat{E}$. Данной перестановке будет соответствовать целый класс таких правил, действие которых на платежную матрицу в виде перестановок платежей будет оставлять неизменными соотношения между платежами.

Будем считать, что с точки зрения влияния на равновесия в игре, действие институтов которое оставляет неизменными соотношения выигрышей и тем самым не имеет координационных экономических последствий игровой ситуации, является чисто распределительным. С другой стороны, перестановки, являющиеся представлениями правил, оставляют неизменной сумму выигрышей каждого игрока по всем возможным стратегиям. С экономической точки зрения математическое ожидание выигрыша (средневзвешенный выигрыш) остается неизменным для каждого участника. Такой средневзвешенный выигрыш равен одной четвертой от суммы выигрышей для любого участника, при условии что вероятности выбора участниками каждой из возможных стратегий в игре составляют 0,5. В этом смысле действие такого правила можно назвать координационным.

Определение. Действие правила называется координационным по мере средневзвешенного выигрыша, если в результате его применения остается неизменной сумма выигрышей каждого участника по всем возможным стратегиям.

Способы разделения последствий правил на координационные и распределительные могут быть различными, их может быть несколько. В таком случае для выбора какого-то конкретного способа деления требуется договоренность, конвенция. Представленное выше рассуждение предлагает один из способов такого разделения.

НЕПРЕРЫВНАЯ КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Пусть существует некоторое мероприятие, которое может состояться при кооперативном поведении членов определенной группы.

Тогда для вычисления ожидаемых выигрышей участников, следующих кооперативной и некооперативной стратегиям соответственно, можно записать следующие соотношения:

$$EU(K) = nx_1 + (1-n)\,x_3; \qquad (5)$$

$$EU(\overline{K}) = nx_2 + (1-n)\,x_4, \qquad (6)$$

где EU – ожидаемый выигрыш участников; K – кооперативная стратегия; n – доля участников, следующих коопе-

[2] Подробнее о проблеме координации и других проблемах при взаимодействии экономических субъектов в рамках теории игр см.: [Schotter A., 1981, р. 22–24].

ративной стратегии; x_i – выигрыши в исходной платежной матрице.

Средний (средневзвешенный) выигрыш участника составляет:

$$EU_{ср} = nEU(K) + (1-n)\,EU(\overline{K}) = n^2(x_1 - x_2 - x_3 + x_4) + n(x_3 + x_2 - 2x_4) + x_4. \quad (7)$$

Тогда, отталкиваясь от уравнения репликации в рамках эволюционной теории игр (это уравнение, по сути, отражено в первом равенстве соотношения (8)), кинетическое уравнение относительно n как независимой переменной можно записать [Hofbauer J., Sigmund K., 2003; Smith J.M., 1982; Golman R., Page S.E., 2010; Bierman H.S., Fernandez L, 1998, p. 384–397]:

$$\frac{dn}{dt} = n(EU(K) - EU_{ср}) = n(((x_2 - x_1) + (x_3 - x_4))n^2 + (x_1 - x_2 + 2(x_4 - x_3))n + (x_3 - x_4)) \quad (8)$$

В качестве управляющих параметров введем: $a = x_1 - x_2$ и $b = x_3 - x_4$.

Тогда в рамках рассмотренной выше одновременной игры в чистых стратегиях имеем:

- при $a > 0$, $b < 0$ два равновесия по Нэшу (чистая координационная игра, проблема координации);
- при $a < 0$, $b < 0$ одно равновесие по Нэшу, отличное от равновесия по Парето (дилемма заключенного, проблема кооперации);
- при $a > 0$, $b > 0$ одно равновесие по Нэшу, совпадающее с оптимальным по Парето.

А в рамках эволюционной игры из (8) получаем:

$$\frac{dn}{dt} = n((b-a)n^2 + (a-2b)n + b). \quad (9)$$

В качестве исходной ситуации до применения параметрического управления рассмотрим случай $a > 0$, $b < 0$. Тогда данное уравнение, разрешенное относительно, имеет три корня $(0, b/(b-a), 1)$.

Если теперь уравнение

$$\frac{dQ}{dt} = -Q^3 + 3Q^2 - 2Q, \quad (10)$$

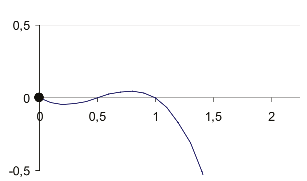
где Q – объем продукции, выпускаемый хозяйствующим субъектом, которое описывает модель управления поведением хозяйствующего субъекта в рамках сильной формы гипотезы об ограниченной рациональности [Обыденов А.Ю., 2017], нормировать на корни $Q_2 = 0{,}5$ и $Q_3 = 1$ (вместо корней $Q_2 = 1$ и $Q_3 = 2$), тогда взамен этого уравнения (10) получаем:

$$\frac{dQ}{dt} = -Q^3 + 1{,}5Q^2 - 0{,}5Q. \quad (11)$$

А если в уравнение (9) положить $a = 0{,}5$; $b = -0{,}5$, то получим уравнение, с точностью до обозначений идентичное уравнению (11):

$$\frac{dn}{dt} = -n^3 + 1{,}5n^2 - 0{,}5n \quad (12)$$

Рис. 1. Фазовая диаграмма, соответствующая соотношению (12)



На фазовой диаграмме получаем две устойчивые точки: $n_1 = 0$, $n_3 = 1$ и одну неустойчивую: $n_2 = 0{,}5$.

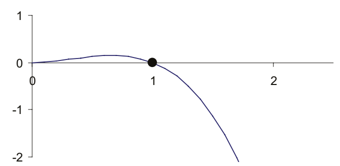
Таким образом, разными путями мы получили идентичные уравнения с тождественными корнями. И в обоих случаях существует два устойчивых состояния, создающих возможности для параметрического управления. Мы знаем, что этому случаю ($a > 0$, $b < 0$) с непрерывными Q и n соответствует одновременная координационная игра в чистых стратегиях с двумя равновесиями по Нэшу. Данный пример иллюстрирует «народную теорему»: в чистых стратегиях одновременной игры строгим равновесиям по Нэшу в эволюционной игре в рамках динамики репликации соответствуют аттракторы (асимптотически устойчивые состояния) [Cressman R., 2003].

Для осуществления параметрического управления по отношению к (12) положим в (9) $a = 1$, $b = 0$ (одно равновесие по Нэшу, оптимальное по Парето) и получим кинетическое уравнение:

$$\frac{dn}{dt} = -n^3 + n^2 \quad (13)$$

Имеем одно устойчивое состояние $n = 1$:

Рис. 2. Фазовая диаграмма, соответствующая соотношению (13)



В рамках модели сильной формы гипотезы об ограниченной рациональности такому управлению соответствует ценовое регулирование [Обыденов А.Ю., 2017]. С точки зрения теории игр при $a = 1$, $b = 0$ мы имеем одновременную игру с одним равновесием по Нэшу в чистых стратегиях, которое может быть оптимальным по Парето. Такому параметрическому управлению соответствует правило (институт) с матрицей, указанной в уравнении (4).

Параметрическое управление в рамках игр

Характеристики и модели для сравнения	Исходное состояние	Состояние после параметрического управления
Параметры	$a > 0$, $b < 0$	$a > 0$, $b = 0$
Дискретная (неповторяющаяся) игра	Чистая координационная игра, проблема координации, два равновесия по Нэшу	Одно равновесие по Нэшу, которое может быть оптимальным по Парето
Эволюционная игра	Два устойчивых состояния	Одно устойчивое состояние, которое может оказаться желаемым
Меры параметрического управления в рамках модели сильной формы ограниченной рациональности	—	Ценовое регулирование

Исходя из тождества уравнений (11) и (12), аналогичности уравнения после управления (13), заключаем, что разные по постановке задачи приводят к идентичным описаниям, схожим способам управления и их результатам. Ранее уже отмечались сходства между кинетическим уравнением в рамках модели сильной формы ограниченной рациональности (уравнение 11) и уравнением, полученным на базе эволюционной теории игр (уравнение 12). Сходства обусловлены наличием эффекта масштаба и пропорциональности выгоде изменения независимой переменной в обоих случаях. В модели сильной формы ограниченной рациональности роль теоретико-игровой средней выгоды играет нормальная прибыль, отнесенная к единице продукции. В обоих случаях имеет место множественность устойчивых состояний. Все эти сходства (см. таблицу) позволяют обобщить результаты проведенных исследований.

В общем случае речь может идти об эффекте координации [Полтерович В.М., 1999, с. 8–9]. Например, чем больше людей следуют какой-либо ментальной модели, норме, тем менее выгодным становится отклоняться от нормы и тем выше выгода каждого, придерживающегося данной модели поведения или нормы. Некоторые исследователи схожий эффект называют «эффектом стадности» [Dixit A.K., Nalebuff B.J., 1991].

Таким образом, рассмотренная нелинейная динамика с тремя стационарными состояниями в целом характерна для проблемы координации, и такой динамике соответствуют самые различные координационные задачи: например, эволюция правила направления дорожного движения [Кузьминов Я.И., Бендукидзе К.А., Юдкевич М.М., 2006], модель эволюции правила QWERTY, динамика соседства белого и афроамериканского населения в американских городах [Dixit, Nalebuff, 1991]. Такое поведение характерно для активных (самоорганизующихся) бистабильных сред [Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С., 2007]. При этом наш подход может оказаться эффективным для решения проблем координации в целом.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Институты могут быть представлены в виде перестановок выигрышей экономических субъектов в рамках теоретико-игрового подхода. Такая алгебраическая формализация институтов помогает исследовать свойства институтов через их управляющее воздействие на экономическую ситуацию. В частности, можно будет более строго разграничить координационный и распределительные аспекты функционирования институтов, выявить в практике управления ситуации, когда набор установленных правил приводит к тождественному преобразованию, а также объединить правила, производящие одинаковое действие, в классы.

Использование формализма эволюционной теории игр позволяет перейти от одновременных дискретных игр к параметрическому управлению в рамках нелинейно-динамических моделей. Нелинейная динамика с тремя стационарными состояниями встречается в самых различных моделях. Предложенный способ формализации институтов может быть использован для решения достаточно широкого круга задач, например для представления институтов в виде параметров, позволяющих стратегически управлять самоорганизацией экономических субъектов, в частности путем изменения структуры устойчивых состояний в ситуациях с проблемой координации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Геродот* (1972) История. М.: Наука. 600 с.
2. *Крючкова П.В., Обыденов А.Ю.* (2003) Издержки и риски саморегулирования. М.: ИИФ «СПРОС» КонфОП. 93 с.
3. *Кузьминов Я.И., Бендукидзе К.А., Юдкевич М.М.* (2006) Курс институциональной экономики. Институты, сети, трансакционные издержки, контракты. М.: Изд. дом ГУ ВШЭ. 444 с.
4. *Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С.* (2007) Основы теории сложных систем. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований. 620 с.
5. *Обыденов А.* (2016) Основания параметрического стратегического управления: институциональный анализ // Вопросы экономики. № 8. С. 120–126.
6. *Обыденов А.Ю.* (2017) Параметрическое управление поведением хозяйствующих субъектов в условиях ограниченной рациональности. // Эффективное Антикризисное Управление. Т. 103–104, № 4–5. С. 87–110.
7. *Полтерович В.М.* (1999) Институциональные ловушки и экономические реформы // Экономика и математические методы. Т. 35, № 2. С. 3–20.
8. *Тамбовцев В.Л.* (2004) О разнообразии форм описания институтов // Общественные науки и современность. № 2. С. 107–118.
9. *Bierman H.S., Fernandez L.* (1998) Game Theory with Economic Applications. Boston, Mass.: Addson Wesley. 480 p.
10. *Bromley D.W.* (1989) Economic Interests and Institutions: The Conceptual Foundations of Public Policy. New York. 274 p.
11. *Cressman R.* (2003) Evolutionary dynamics and extensive form games. – Cambridge, Mass.: MIT Press. 330 p.
12. *Dixit A.K., Nalebuff B.J.* (1991) Thinking Strategically: The Competitive edge in Business, Politics and Everyday Life. New York; London: W.W. Norton. 393 p.
13. *Golman R., Page S.E.* (2010) Basins of Attraction and Equilibrium Selection Under Different Learning Rules. // Journal of Evolutionary Economics. Vol. 20, № 2. P. 49–72.
14. *Hofbauer J., Sigmund K.* (2003) Evolutionary game dynamics // Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. 40, № 4. P. 479–519.
15. *Schotter A.* (1981) The Economic Theory of Social Institutions. Cambridge. 192 p.
16. *Shubik M.* (1982) Game Theory in the Social Sciences. Cambridge, Mass.: The MIT Press. 528 p.
17. *Smith J.M.* (1982) Evolution and the Theory of Games. Cambridge: Cambridge University Press. 234 p.