УДК 338.24+519.86

**А. И. ЗВЯГИНЦЕВ**
***Доктор экон. наук, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник. Руководитель отдела финансового мониторинга в ЗАО «Управляющая компания «Норд-Вест Капитал»», Санкт-Петербург. Область научных интересов: математические методы в экономике, теория управления активами, рынок ценных бумаг, риск-менеджмент.***

*E-mail: azvyagintsev@mail.ru*

Цель данной работы заключается в демонстрации возможного использования математических методов для диагностики кризисных явлений в бизнесе и разработки способов их устранения. В статье рассмотрена модель Файхтингера для двух конкурирующих фирм, осуществляющих активную инвестиционную стратегию на товарном рынке. На основе модификации этой модели предложен эффективный метод, позволяющий быстро нейтрализовать рыночный хаос и вывести динамику обеих фирм на устойчивый режим функционирования. Важным преимуществом разработанного инструментария по управлению бизнесом конкурирующих фирм является то, что для подавления хаотичных тенденций требуется несколько корректирующих операций.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:
**дискретная система, корректирующая операция, рыночный хаос, стабилизация, управление бизнесом.**

# Подавление рыночного хаоса
## и стабилизация бизнеса

### Введение

В современной экономической науке все более важную роль играет математическое моделирование. Динамика многих экономических процессов может моделироваться нелинейными дискретными системами. Одним из примеров использования математического аппарата в экономике является модель Файхтингера [Feichtinger G.,1992]. Это модель микроэкономической системы, описывающей взаимодействие двух конкурирующих фирм, которые являются доминирующими компаниями на некотором сегменте товарного рынка. Предполагается, что обе фирмы используют асимметричные стратегии инвестирования, причем каждый последующий уровень инвестиций зависит от ситуации в предшествующем периоде. Так, первая фирма инвестирует больше, если в прошлый период она опережала вторую фирму, а вторая фирма увеличивает объем инвестиций в том случае, если в предыдущий период она проигрывала первой фирме.

При определенных условиях модель Файхтингера, как и многие нелинейные системы, способна генерировать хаотичную динамику. Поскольку хаотичный сценарий в бизнесе крайне нежелателен, то возникает необходимость в инструментарии, позволяющем подавлять и предотвращать рыночный хаос. В последнее время очень активно развивается теория управления хаосом. Разработке методов управления хаосом посвящено большое количество теоретических и практических публикаций как отечественных, так и зарубежных авторов.

Задача управления хаосом в модели Файхтингера исследовалась в работах [Holyst J.A., Hagel T., Haag G. et al., 1996; Holyst J.A., Hagel T., Haag G., 1997; Holyst J.A., UrbanowiczK., 2000; Holyst J.A., Zebrowska M., Urbanowicz K., 2001; Лоскутов А.Ю., 2010], где показано, что при соответствующем подборе параметров или функций управления иногда удается подавить хаос и выйти на стабильный уровень. В данной статье для модели Файхтингера предлагается управление, позволяющее нейтрализовать хаос и быстро стабилизировать бизнес обеих фирм. Это управление базируется на результатах работы [Леонов Г.А., Звягинцева К.А., 2015], в которой содержится эффективный алгоритм стабилизации на основе метода Пирагаса [Pyragas K., 1992] с запаздывающей обратной связью.

### Модель Файхтингера

Модель Файхтингера является двухмерной дискретной системой

$$x(j+1) = F(x(j)); j \in N, \tag{1}$$

где

$$x(j) = \begin{bmatrix} x_1(j) \\ x_2(j) \end{bmatrix}; F(x(j)) = \begin{bmatrix} (1-\alpha)x_1(j) + \dfrac{a}{1+e^{-c(x_1(j)-x_2(j))}} \\ (1-\beta)x_2(j) + \dfrac{b}{1+e^{-c(x_1(j))-x_2(j))}} \end{bmatrix}.$$

Здесь $x_1(j), x_2(j)$ – значения продаж соответственно первой и второй фирм в момент времени; $j$; $\alpha$, $\beta \in (0,1)$ – темпы снижения объемов продаж в отсутствие инвестиций, $a$, $b$ – масштабы инвестиций, характеризующие эффективность инвестиций обеих фирм; $c$ – мера эластичности инвестиционных стратегий. В дальнейшем будем использовать значения параметров, взятые из работ [Feichtinger G., 1992; Лоскутов А. Ю., 2010]:

$\alpha = 0{,}46$; $\beta = 0{,}7$; $a = 0{,}225$; $b = 0{,}74$; $c = 105$. (2)

Хорошо известно, что поведение решения системы (1) характеризуется высокочувствительной зависимостью от начальных данных. В качестве примера возьмем начальные условия

$x_1(0) = 0{,}05$; $x_2(0) = 0{,}07$. (3)

Вычисленное для этих значений решение системы (1) показано на рис. 1 и 2, которые наглядно демонстрируют хаотичный характер поведения решения $x_1(j), x_2(j)$. На рис. 3 представлен фазовый портрет соответствующей орбиты, который по своему виду похож на странный аттрактор.

***Рис. 1. График продаж первой фирмы***

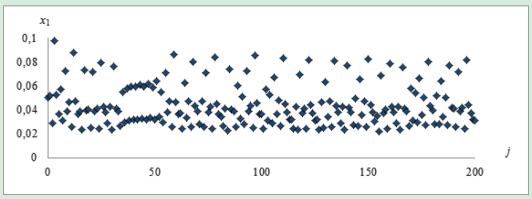


***Рис. 2. График продаж второй фирмы***

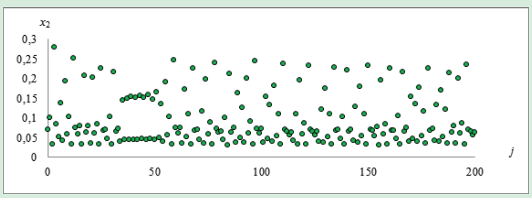
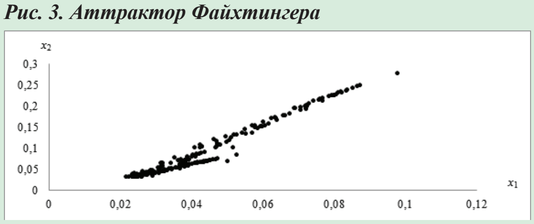


***Рис. 3. Аттрактор Файхтингера***



В условиях рыночной экономики возникновение хаотичного движения наблюдается довольно часто. Наиболее наглядным примером является фондовый рынок, где котировки акций иногда показывают весьма экзотичную динамику.

Как показывает приведенный на рис. 1 и 2 пример, при осуществлении деятельности на товарном рынке нельзя исключать вероятность того, что в некоторый момент времени бизнес-процесс случайно попадет в зону точек бифуркации, которые начинают порождать хаос. Менеджеры заинтересованы в стабильной работе своего предприятия. Поэтому важной задачей менеджмента является эффективное управление бизнесом, направленное на стабилизацию производства и недопущение хаотичных тенденций.

Для системы $x(j) = const$; $j \in N$ (1) в качестве стабильного и устойчивого решения логично брать неподвижную точку $\tilde{x}$, которая находится из условия

$$F(\tilde{x}) = \tilde{x},$$

что эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} a x_1\left(1 + e^{-c\left(1-\frac{\alpha b}{\beta a}\right)\tilde{x}_1}\right) = a, \\ \tilde{x}_2 = \dfrac{\alpha b}{\beta a}\tilde{x}_1 \end{cases}$$

где $\tilde{x}_1$ – первая координата неподвижной точки; $\tilde{x}_2$ – вторая координата неподвижной точки.

Для значений (2) решением этой системы с точностью $10^{-14}$ (до 13 знаков после запятой) является

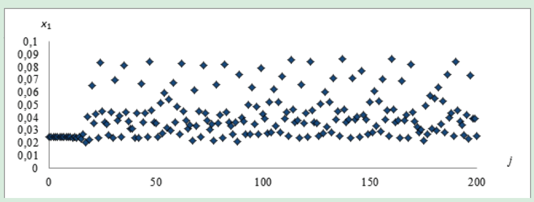
$$\tilde{x}_1(j) = \tilde{x}_1 = 0{,}0242287122521097;$$

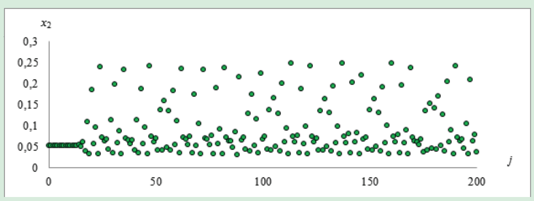
$$\tilde{x}_2(j) = \tilde{x}_2 = 0{,}0523647850832907$$

В реальном бизнесе добиться сколь угодно высокой точности весьма проблематично. Например, если объемы продаж обеих фирм выражаются в миллионах долларов (рублей), то с точностью до центов (копеек) получается только восемь знаков после запятой. Решение системы (1) с начальными данными

$x_1(0) = 0{,}02422871$; $x_2(0) = 0{,}05236479$

после округления значений $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ до восьми знаков после запятой изображено на рис 4 и 5. Стабильный уровень продаж сохраняется вначале и только в краткосрочном периоде времени, а затем рынок переходит в стадию хаоса. Это обусловлено накоплением ошибки округления и особенностью хаотичности, которая заключается в чрезвычайной чувствительности к малым возмущениям.





Таким образом, возникает необходимость подавления хаоса и стабилизации уровней продаж. Этого можно добиться за счет введения функции управления и рассмотрения модифицированной системы

$$x(j+1) = F(x(j)) + U(j). \quad (4)$$

В последнее время очень активно развивается теория управления хаосом как одно из направлений теории управляемых процессов. По этой тематике ежегодно публикуются сотни научных исследований. Воспользуемся результатами работы [Леонов Г.А., Звягинцева К.А., 2015], в которой приведен эффективный и удобный для практики метод стабилизации дискретных систем.

## Моделирование управления рыночным хаосом

Если систему (1) линеаризовать в окрестности неподвижной точки, а затем применить метод Пирагаса [Pyragas K., 1992], то получается система

$$x(j+1) = F(\widetilde{x}) + A(x(j) - \widetilde{x}) + K(j)(x(j) - x(j-1)), \quad (5)$$

где матрица Якоби

$$A = \begin{bmatrix} 1-\alpha+\dfrac{ace^{-c(\widetilde{x}_1-\widetilde{x}_2)}}{(1+e^{-c(\widetilde{x}_1-\widetilde{x}_2)})^2} & -\dfrac{ace^{-c(\widetilde{x}_1-\widetilde{x}_2)}}{(1+e^{-c(\widetilde{x}_1-\widetilde{x}_2)})^2} \\ \dfrac{bce^{-c(\widetilde{x}_1-\widetilde{x}_2)}}{(1+e^{-c(\widetilde{x}_1-\widetilde{x}_2)})^2} & 1-\beta-\dfrac{bce^{-c(\widetilde{x}_1-\widetilde{x}_2)}}{(1+e^{-c(x1-x2)})^2} \end{bmatrix}$$

Стабилизация системы (5) достигается за счет удачного выбора матриц

$$K(j) = \begin{bmatrix} k_{11}(j) & k_{12}(j) \\ k_{21}(j) & k_{22}(j) \end{bmatrix}.$$

Следуя идеям работы [Леонов Г.А., Звягинцева К.А., 2015], используем двухпериодичную матрицу

$$K(j) = \begin{cases} (qI - A^2)(A-I)^{-1}, \; j = 2n \\ O, \; j \neq 2n, n \in N \end{cases},$$

где число $q \in (-1,1)$; $I$ – единичная матрица. Очевидно, что система (5) имеет вид (4), если в качестве управления взять

$$U(j) = F(\widetilde{x}) - F(x(j)) + A(x(j) - \widetilde{x}) + K(j)(x(j) - x(j-1)). \quad (6)$$

Результаты вычислений для системы (4) с управлением (6) и начальными данными (3) приведены на рис. 6 и 7. Стабилизация продаж обеих фирм происходит очень быстро, достигая высокой точности за малое количество итераций. Таким образом, для предотвращения хаотического сценария в бизнесе обеим компаниям необходимо проводить корректирующие (антикризисные) операции вида (6). Естественно, сразу возникает вопрос, насколько затратно и обременительно проведение таких операций.

*Рис. 6. График стабилизации продаж первой фирмы*

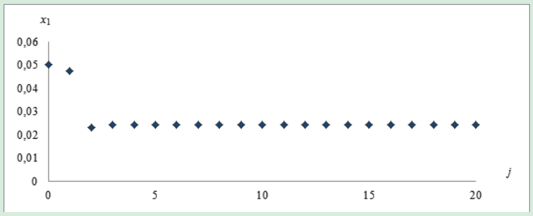
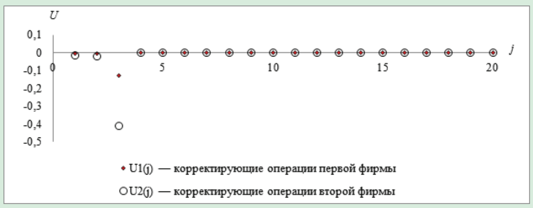



*Рис. 7. График стабилизации продаж второй фирмы*


Корректирующее воздействие обеих фирм требуется только в первые три периода времени, а затем оно становится нулевым (рис. 8). Отрицательные значения корректирующих операций указывают на необходимость снижения продаж, например за счет соответствующего повышения цен на товары.

*Рис. 8. Графики операций управления обеих фирм*




Если для деятельности фирм характерен бизнес-цикл, например периодичная двухуровневая динамика продаж, обусловленная сезонными или другими факторами, то в системе (1) необходимо использовать цикл с периодом два. Тогда линеаризация осуществляется в окрестности 2-го цикла, а далее повторяется приведенный выше алгоритм. Соответствующие графики подавления хаоса и управленческих операций показаны на рис. 9–11.

*Рис. 9. Стабилизация периодических продаж первой фирмы*

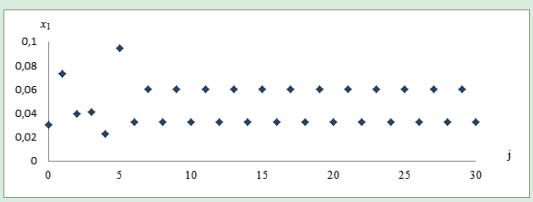


*Рис. 10. Стабилизация периодических продаж второй фирмы*

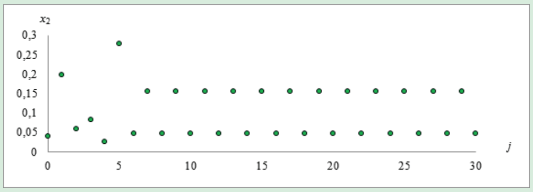
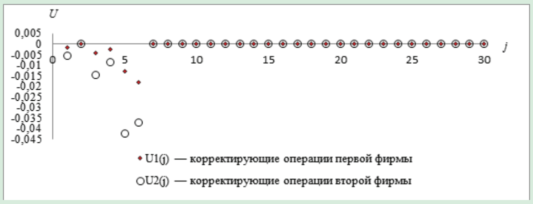



*Рис. 11. Операции управления обеих фирм в случае периодических продаж.*




Аналогично можно осуществить нейтрализацию рыночного хаоса и стабилизировать бизнес-цикл любого периода, который наблюдается в динамике продаж обеих фирм.

## Заключение

Для успешной деятельности компании необходимо учитывать поведение конкурентов и выстраивать собственную стратегию ведения бизнеса в соответствии с конъюнктурой, которая складывается в ее сегменте рынка. В данной статье предложен способ управления бизнесом конкурирующих фирм, который дает возможность нейтрализовать негативное воздействие хаотичного поведения рынка.

Главное преимущество рассмотренной модели (4) с управлением (6) заключается в том, что за счет небольшого количества корректирующих операций можно подавить хаотическую динамику рынка и быстро вывести продажи фирм на устойчивые уровни. Важно также отметить, что предложенный метод управления процессами на рынке довольно прост в практической реализации и может применяться при любой периодичности бизнес-циклов компаний. Таким образом, получен достаточно эффективный инструмент, позволяющий осуществлять стабилизацию бизнеса в условиях хаотичного рынка.

В практической деятельности представленная модель может использоваться для прогнозирования различных бизнес-сценариев и диагностики возможного рыночного хаоса. На основе бухгалтерской отчетности и обязательной для раскрытия информации менеджеры конкурирующих фирм могут оценить и рассчитать средние значения параметров, входящих в модифицированную модель Файхтингера. Задав эти параметры и изменяя начальные данные, можно моделировать сценарные прогнозы, которые являются базой для стратегического планирования деятельности компаний. В случае негативного сценария, обусловленного возникновением рыночного хаоса, с помощью предложенной модели менеджеры компаний имеют возможность определять объемы антикризисных операций и моменты их проведения в целях противодействия кризисным явлениям. Практическое осуществление перечисленных мероприятий способствует разработке стратегии развития конкурирующих фирм.

## Список литературы:

1. **Леонов Г. А., Звягинцева К. А.** (2015) Стабилизация по Пирагасу дискретных систем запаздывающей обратной связью с периодическим импульсным коэффициентом усиления // Вестник СПбГУ. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. Т. 2 (60). Вып. 3. С. 342–353.
2. **Лоскутов А. Ю.** (2010) Нелинейная оптимизация хаотической динамики рынка // Экономика и математические методы. Т. 46. № 3. С. 58–70.
3. **Feichtinger G.** (1992) Economic evolution and demographic change. Berlin: Springer.
4. **Holyst J. A., Hagel T., Haag G.** (1997) Destructive role of competition and noise for control of microeconomical chaos // Chaos, Solitons and Fractals. Vol. 8. P. 1489–1505.
5. **Holyst J. A., Hagel T., Haag G. et al.** (1996) How to control a chaotic economy? // J. of Evolutionary Econ. Vol. 6. P. 31–42.
6. **Holyst J. A., Urbanowicz K.** (2000) Chaos control in economical model by time-delayed feedback method // Physica A. Vol. 287. P. 587–598.
7. **Holyst J. A., Zebrowska M., Urbanowicz K.** (2001) Observations of deterministic chaos in financial time series by recurrence plots, can one control chaotic economy? // The European Physical J. B. Condensed Matter and Complex Systems. Vol. 20. P. 531–535.
8. **Pyragas K.** (1992) Continuous control of chaos by self-controlling feedback // Physics Letters A. Vol. 170. P. 421–428.